УДК 631.356.2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІБРАЦІЙНОГО ВИКОПУВАННЯ КОРЕНЕПЛОДІВ

В.М. Булгаков, доктор технічних наук,
І.В. Головач, кандидат фізико-математичних наук,
М.Г. Березовий, інженер

На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона розроблена нова теорія повздовжніх коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті.

Функціонал Остроградського-Гамільтона, поздовжні коливання, рівняння частот, форма коливань, амплітуда, частота, коренеплід.

Збирання коренеплодів цукрового буряку є однією з найбільш трудомістких та енергомістких операцій у сільськогосподарському виробництві. Враховуючи те, що Україна належить до високорозвинутих бурякосіючих країн Європи і світу, а цукор є одним із стратегічних продуктів харчування, вітчизняному машинобудуванню необхідно випускати бурякозбиральні машини, функціональні та експлуатаційні показники яких відповідали б рівню найкращих світових аналогів.

Підвищення якісних показників процесу збирання цукрового буряку являє собою комплексну науково-технічну проблему, вирішення якої повинно базуватись на пошуку нових конструктивних рішень робочих органів та компонувальних схем машин, теоретичному обґрунтуванні їх конструктивних та технологічних параметрів, експериментальному підтвердженні проведених теоретичних досліджень з кінцевою метою аналізу та синтезу оптимальних їх параметрів.

Тому розробка сучасних теорій викопування коренеплодів цукрового буряку, зокрема вібраційної, створює передумови для проектування викопуючих робочих органів з оптимальними параметрами.

Теорія вібраційного викопування коренеплодів цукрових буряків була створена та опублікована у фундаментальній праці [1], в якій коренеплід моделюється тілом, що має пружні властивості, і його уявлено стержнем змінного поперечного перерізу, що має один закріплений кінець. Розглянуті в цій роботі поперечні коливання коренеплоду описуються за допомогою диференціального рівняння в частинних похідних четвертого порядку. За результатами розв’язання цього рівняння визначали головні форми власних коливань коренеплоду, а з додатково складених рівнянь кінетостатики знайшли умови його вилучення з ґрунту під дією збурювальної сили, що прикладена до нього в поперечно-вертикальній площині.

Розглянемо тепер випадок, коли коливальні рухи від вібраційного викопуючого робочого органу будуть передаватись коренеплоду в поздовжньо-вертикальній площині. Вважаємо, що коренеплід, який знаходиться у ґрунті, є складною суцільно-пружною системою з нескінченним числом степенів вільності і моделюється також як стержень змінного поперечного перерізу з нижнім закріпленим кінцем.

У той час, як теоретичною основою більшості досліджень коливань голономних систем зі скінченним числом степенів вільності є рівняння Лагранжа II-го роду в узагальнених координатах, для дослідження коливань голономних систем з нескінченним числом степенів вільності застосовують так званий принцип стаціонарної дії Остроградського-Гамільтона [2].

Метою дослідження було розробити нову теорію поздовжніх коливань тіла коренеплоду при вібраційному його викопуванні.

Зміст дослідження. В теорії поздовжніх, крутильних і поперечних коливань прямих стержнів застосовуються функціонали Остроградського-Гамільтона, які в найбільш загальній формі мають такий вигляд:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l} L\left(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx\,dt\,, \qquad (1)$$

де $L = T - \ddot{I}$ – функція Лагранжа; T – кінетична енергія системи; $\ddot{I}$ – потенціальна енергія системи.

Вважаючи коренеплід, що знаходиться у ґрунті, стержнем змінного поперечного перерізу за довжиною з одним закріпленим кінцем (рис. 1), застосуємо принцип Остроградського-Гамільтона для дослідження поздовжніх коливань коренеплоду, які відбуваються під дією вертикальної збурювальної сили, що змінюється за гармонійним законом такого вигляду:

$$Q_{\text{çá.}} = H \sin \omega t , \qquad (2)$$

де H – амплітуда вимушених коливань; ω – частота вимушених коливань.

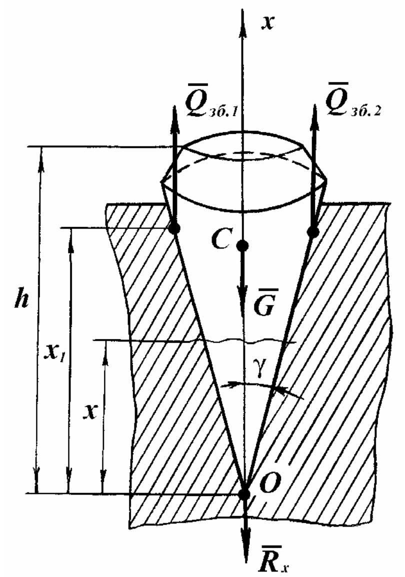

Рис.1. Схема сил, які діють на коренеплід у момент захвату вібраційним викопуючим робочим органом

Коренеплід, який має конусоподібне тіло (з кутом при вершині 2γ, а верхня частина знаходиться дещо вище рівня поверхні ґрунту), моделюється як стержень змінного поперечного перерізу із закріпленим нижнім кінцем (точка O). У центрі ваги, що позначений точкою C, прикладена сила $\overline{G}$ – маса коренеплоду. Загальна його довжина – h. Крізь вісь симетрії коренеплоду проведена вертикальна вісь x, початок якої збігається з точкою O. Зв'язок коренеплоду з ґрунтом визначається загальною його реакцією $\overline{R}_x$, яка розташована вздовж осі x.

Зазначена вище збурювальна сила $\overline{Q}_{\text{çá.}}$ прикладається до коренеплоду відразу від двох викопуючих лемешів з двох боків, а тому на схемі вона представлена двома складовими $\overline{Q}_{çá.1}$ та $\overline{Q}_{çá.2}$. Ці сили прикладені на відстані x_1 від початку координат (точки O) і викликають коливання коренеплоду в поздовжньо-вертикальній площині, руйнують зв’язки коренеплоду з ґрунтом, створюючи умови для видалення.

Складемо функціонал S Остроградського-Гамільтона для вібраційного процесу, який розглядається. З цією метою введемо такі необхідні позначення:

$F(x)$ – площа поперечного перерізу коренеплоду в будь-якій точці, що знаходиться на відстані x від нижнього кінця, $м^2$; E – модуль Юнга для матеріалу коренеплоду, $\left(\frac{H}{ì^2}\right)$; $y(x,t)$ – поздовжнє зміщення будь-якого поперечного перерізу коренеплоду в момент часу t, $(м)$; $Q(x,t)$ – інтенсивність поздовжнього зовнішнього навантаження, спрямованого вздовж осі коренеплоду, $\left(\frac{H}{ì}\right)$; $\mu(x)$ – погонна маса коренеплоду, $\left(\frac{êã}{ì}\right)$.

Тоді кінетична енергія коливального руху коренеплоду дорівнюватиме:

$$T = \frac{1}{2}\int_o^h \mu(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{3}$$

Потенціальна енергія пружної деформації:

$$Ï_1 = \frac{1}{2}\int_o^h E\cdot F(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{4}$$

Потенціальна енергія розтягу від поздовжнього навантаження $Q(x,t)$:

$$Ï_2 = \frac{1}{2}\int_o^h Q(x,t)\,y\,dx. \tag{5}$$

Складемо функцію Лагранжа L.

Оскільки

$$L = T - Ï_1 + Ï_2, \tag{6}$$

то, враховуючи вирази (3), (4) та (5), отримаємо:

$$L = \frac{1}{2}\int_o^h \left[\mu(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - E\,F(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + Q(x,t)\,y\right]dx. \tag{7}$$

Підставимо вираз (7) у вираз (1) і матимемо:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left[\mu(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - EF(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \right. \\ \left. + Q(x,t)\,y\right]dx\,dt. \tag{8}$$

Знайдемо далі вирази всіх величин, які входять до функціоналу (8). Враховуючи конусоподібну форму коренеплоду, визначаємо площу його поперечного перерізу $F(x)$ в точці, яка знаходиться на довільній відстані x від точки O і дорівнює

$$F(x) = \pi\, x^2\, tg^2\gamma\,. \tag{9}$$

Очевидно, що погонну масу коренеплоду можна визначити за допомогою такого виразу:

$$\mu(x) = \rho \cdot F(x),$$

або, враховуючи (9) –

$$\mu(x) = \rho \cdot \pi\, \tilde{o}^2\, tg^2\gamma\,, \tag{10}$$

де ρ – густина коренеплоду, кг/м^3.

Оскільки величина $Q(x,t)$, що входить до функціоналу (8), є інтенсивністю розподіленого навантаження, то в кожному конкретному випадку збурювальне зусилля повинне мати цю ж саму розмірність. За допомогою так званої імпульсивної функції першого порядку $\sigma_1(x)$ [2] можна визначати інтенсивність зосередженого навантаження і таким чином включати до складу розподіленого за довжиною навантаження зосереджені сили та їх моменти.

Отже, якщо $Q_{\text{çá.}}(t)$ – зосереджена збурювальна сила, яка прикладена в точці x_1 і вимірюється в ньютонах, то функція

$$Q_{\text{çá.}}(x,t) = Q_{\text{çá.}}(t)\cdot \sigma_1(x - x_1) \tag{11}$$

має розмірність $\left(\frac{H}{\grave{\imath}}\right)$ і виражає інтенсивність зосередженого навантаження в точці x_1.

Функція $\sigma_1(x - x_1)$ дорівнює нулю для всіх x, крім $x = x_1$, де вона перетворюється в нескінченність.

Нехай збурювальна сила, що діє за законом

$$Q_{çá.}\left(t\right)=H\sin\omega t\,, \qquad (12)$$

прикладена до коренеплоду на відстані x_1 від початку відліку (точка O на рис. 1). Тоді згідно з (11) можна написати:

$$Q_{çá.}\left(x,t\right)=H\sin\omega t\cdot\sigma_1\left(x-x_1\right). \qquad (13)$$

Оскільки коренеплід зв'язаний з ґрунтом, який є пружним середовищем, то при дії на коренеплід збурювальної сили (12) виникає сила опору ґрунту переміщенню коренеплоду під час його коливань. Вона також впливає на процес власних коливань коренеплоду в ґрунті, особливо на початку коливального процесу, поки зв'язки коренеплоду з ґрунтом ще не порушені.

Очевидно, що сила опору ґрунту (для всього тіла коренеплоду) є розподіленим навантаженням на площі контакту коренеплоду з ґрунтом, а тому визначимо її інтенсивність як силу опору ґрунту переміщенню одиниці довжини коренеплоду.

Нехай c – коефіцієнт пружної деформації ґрунту, віднесений до площі контакту, який вимірюється в *Н/м*^{2}. Будемо вважати, що оточуючий коренеплід ґрунт під дією збурювальної сили $H\sin\omega t$ здійснює вимушені коливання за тим самим гармонійним законом з амплітудою, яка визначається пружними властивостями ґрунту. Тоді інтенсивність $P\left(x,t\right)$ опору ґрунту переміщенню коренеплоду в точці x буде дорівнювати:

$$P\left(x,t\right)=2\pi\, c x\cdot tg\gamma\cdot\sin\omega t,\quad \left(\frac{H}{ì}\right). \qquad (14)$$

Таким чином, отримаємо таке співвідношення для поздовжнього зовнішнього навантаження:

$$Q\left(x,t\right)=Q_{çá.}\left(x,t\right)-P\left(x,t\right).$$

Враховуючи вирази (9), (10), (13) і (14), функціонал Остроградського-Гамільтона (8) набуде такого вигляду:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{h}\left\{\rho\cdot\pi\,x^2tg^2\gamma\left(\frac{\partial\,y}{\partial\,t}\right)^2-\right.$$
$$-E\,\pi\,x^2\cdot tg^2\gamma\left(\frac{\partial\,y}{\partial\,x}\right)^2+\left[H\sin\omega t\cdot\sigma_1(x-x_1)-\right. \tag{15}$$
$$\left.\left.-2\pi\,c\,x\cdot tg\gamma\cdot\sin\omega t\right]y(x,t)\right\}\,dx\,dt.$$

Для знаходження власних форм і частот поздовжніх коливань коренеплоду в ґрунті застосуємо метод Рітца [2], згідно з яким ми шукатимемо гармонійні поздовжні коливання коренеплоду у такому вигляді:

$$y(x,t)=\varphi(x)\sin(p\,t+\alpha), \tag{16}$$

де $\varphi(x)$ – власна форма головних коливань, тобто функція, яка визначає неперервну сукупність амплітудних поздовжніх відхилень поперечних перерізів коренеплоду від їх положень рівноваги; p – власна частота головних коливань.

Оскільки власні форми і власні частоти зв'язані з вільними коливаннями системи, необхідно у функціоналі (15) виділити ту частину, яка описує саме її вільні коливання. Очевидно, що це буде функціонал такого вигляду:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left[\rho\pi x^2tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-E\pi x^2tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt. \tag{17}$$

Підставим вираз (16) у функціонал (17), отримаємо:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{h}\left\{\;\rho\cdot\pi\,x^2\cdot tg^2\gamma\cdot\varphi^2(x)\cdot p^2\cdot\cos^2(p\,t+\alpha)-\right.$$
$$\left.-E\pi\,x^2\cdot tg^2\gamma[\varphi'(x)]^2\sin^2(p\,t+\alpha)\;\right\}d\,x\,d\,t. \tag{18}$$

Проінтегруємо вираз (18) за t в межах одного періоду $T=\dfrac{2\pi}{p}$, матимемо:

$$S_2=\frac{\pi}{2p}\int_{0}^{h}\left\{\rho\cdot\pi\,x^2\cdot tg^2\gamma\cdot\varphi^2(x)\,p^2-\right.$$
$$\left.-E\,\pi\,x^2\cdot tg^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2\right\}dx. \tag{19}$$

Суть методу Рітца полягає у зведенні варіаційної задачі до задачі на пошук екстремуму функції багатьох незалежних змінних.

Згідно з методом значення функціоналу (19) розглядаються на сукупності лінійних комбінацій функцій, тобто виразів, що мають наступний вигляд:

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\psi_i(x), \tag{20}$$

де α_i – параметри, варіаціями яких ми отримуємо потрібний клас допустимих функцій; $\psi_i(x)$ – базисні функції, які спеціально вибираються і є відомими функціями, що задовольняють геометричні граничні умови задачі.

Підставляючи вираз (20) у вираз (19), отримаємо:

$$\begin{aligned} S_2=\frac{\pi}{2p}\int_0^h\Bigg\{&\rho\cdot\pi x^2tg^2\gamma\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi_i(x)\right]^2p^2-\\ &-E\pi x^2tg^2\gamma\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\psi_i(x)\right)'\right]^2\Bigg\}dx. \end{aligned} \tag{21}$$

Після відповідних перетворень функціонал (21) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} S_2=\frac{\pi}{2p}\int_0^h\Bigg[&\rho\cdot\pi x^2\cdot tg^2\gamma\cdot p^2\sum_{i,k=1}^{n}\psi_i(x)\cdot\psi_k(x)\,\alpha_i\cdot\alpha_k-\\ &-E\pi x^2\cdot tg^2\gamma\sum_{i,k=1}^{n}\psi_i'(x)\cdot\psi_k'(x)\alpha_i\cdot\alpha_k\Bigg]dx. \end{aligned} \tag{22}$$

Введемо далі такі позначення:

$$\begin{aligned} &\int_0^h\rho\cdot\pi x^2\cdot tg^2\gamma\cdot\psi_i(x)\cdot\psi_k(x)\,dx=T_{ik},\\ &\int_0^h E\pi x^2\cdot tg^2\gamma\cdot\psi_i'(x)\cdot\psi_k'(x)\,dx=U_{ik}, \end{aligned} \tag{23}$$

$(i,k=1,2,...,n)$.

Підставимо (23) в (22), отримаємо функціонал у вигляді функції від параметрів $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$:

$$S_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\frac{\pi}{2p}p^2\sum_{i,k=1}^{n}T_{ik}\alpha_i\alpha_k-\frac{\pi}{2p}\sum_{i,k=1}^{n}U_{ik}\alpha_i\alpha_k. \tag{24}$$

Дослідимо на екстремум функціонал (24). Для цього продиференціюємо вираз (24) за параметрами α_i, $\left(i = 1,2,...,n\right)$ та прирівняємо до нуля отримані частинні похідні. В результаті отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, з якої, в свою чергу, знаходимо рівняння частот Рітца для поздовжніх коливань коренеплоду, закріпленого в ґрунті:

$$\begin{vmatrix} U_{11} - p^2 T_{11} & U_{12} - p^2 T_{12} & \dots & U_{1n} - p^2 T_{1n} \\ U_{21} - p^2 T_{21} & U_{22} - p^2 T_{22} & \dots & U_{2n} - p^2 T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n1} - p^2 T_{n1} & U_{n2} - p^2 T_{n2} & \dots & U_{nn} - p^2 T_{nn} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (25)$$

Як відомо, при $n > 4$ це рівняння не можна розв'язати в радикалах, тому необхідно застосувати чисельні методи з реалізацією на ПЕОМ.

Проте на практиці, як правило, визначають лише нижчі частоти, найчастіше першу і другу, які найбільш істотно впливають на технологічний процес, що розглядається.

Тому визначимо першу і другу частоти власних коливань коренеплоду

За допомогою рівняння (25):

$$\begin{vmatrix} U_{11} - p^2 T_{11} & U_{12} - p^2 T_{12} \\ U_{21} - p^2 T_{21} & U_{22} - p^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (26)$$

В результаті його розв'язування отримуємо вирази для знаходження значення першої (основної) частоти:

$$p_1 = \frac{0{,}662422}{h} \sqrt{\frac{E}{\rho}} , \qquad (27)$$

та другої:

$$p_2 = \frac{27{,}931592}{h} \sqrt{\frac{E}{\rho}} . \qquad (28)$$

Обчислимо значення першої і другої частоти для коренеплоду цукрового буряка з такими параметрами [3]: $h = 250$ (*мм*); $E = 18{,}4 \cdot 10^6$ (*Н/м*^{2}); $\rho = 1300$ (*кг/м*^{3}). У результаті обчислень отримаємо:

$$p_1 = \frac{0{,}662422}{250 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{18{,}4 \cdot 10^6}{1300}} = 315 \quad \left(c^{-1}\right),$$

$$p_2 = \frac{27{,}931592}{250 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{18{,}4 \cdot 10^6}{130}} = 13292 \quad \left(c^{-1}\right).$$

Перейдемо далі до дослідження вимушених коливань коренеплоду. Чисто вимушені коливання будуть відбуватися згідно з законом

$$y(x,t) = \varphi(x) \sin \omega t \,, \tag{29}$$

де $\varphi(x)$ – форма вимушених коливань.

Для визначення форми вимушених коливань коренеплоду підставимо вираз (29) у функціонал (15) і отримаємо:

$$\begin{aligned} S_3 = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^h \Big\{ & \rho \pi x^2 tg^2 \gamma \omega^2 \varphi^2(x) \cos^2 \omega t - \\ & - E\pi x^2 tg^2 \gamma \left[\varphi'(x)\right]^2 \sin^2 \omega t + \\ & + \left[H\sigma_1 (x - x_1) - 2\pi c x tg\gamma\right] \varphi(x) \sin^2 \omega t \Big\} dx\, dt. \end{aligned} \tag{30}$$

Проінтегруємо вираз (30) по t в межах одного періоду $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ і матимемо:

$$\begin{aligned} S_4 = \frac{\pi}{2\omega} \int_0^h \Big\{ & \rho \pi x^2 tg^2 \gamma \varphi^2(x) \omega^2 - E\pi x^2 tg^2 \gamma \left[\varphi'(x)\right]^2 + \\ & + H\sigma_1 (x - x_1) \varphi(x) - 2\pi c x tg\gamma \varphi(x) \Big\} dx. \end{aligned} \tag{31}$$

Згідно з методом Рітца розглянемо значення функціоналу (31) на сукупності лінійних комбінацій такого вигляду

$$\varphi(x) = \alpha \psi(x), \tag{32}$$

де α – параметр, варіюванням якого ми отримуємо клас допустимих функцій; $\psi(x)$ – базисна функція.

Підставимо вираз (32) у функціонал (31) і отримаємо:

$$\begin{aligned} S_4 = \frac{\pi}{2\omega} \int_0^h \Big\{ & \rho \pi x^2 tg^2 \gamma \alpha^2 \psi^2(x) \omega^2 - \\ & - E\pi x^2 tg^2 \gamma \alpha^2 \left[\psi'(x)\right]^2 + \\ & + H\sigma_1 (x - x_1) \alpha \psi(x) - 2\pi c x tg\gamma \alpha \psi(x) \Big\} dx. \end{aligned} \tag{33}$$

Введемо позначення:

$$\int_0^h \rho \pi x^2 \cdot tg^2 \gamma \cdot \psi^2(x) \, dx = T \,, \tag{34}$$

$$\int_0^h E\,\pi\,x^2 \cdot tg^2\gamma \cdot [\psi'(x)]^2 dx = U\,, \tag{35}$$

$$\int_0^h \left[H\sigma_1(x - x_1)\cdot\psi(x) - 2\pi c\,x\cdot tg\gamma\cdot\psi(x)\right] dx = L\,. \tag{36}$$

Підставимо вирази (34), (35), (36) у (33), матимемо

$$S_4(\alpha) = \frac{\pi}{2\omega}\left(\omega^2 T\alpha^2 - U\alpha^2 + L\,\alpha\right). \tag{37}$$

Отже, на сукупності функцій (32) функціонал (33) перетворюється у функцію від незалежної змінної α, що має вигляд (37).

Необхідною умовою стаціонарності функціоналу (37) (тобто існування екстремуму) є рівність нулю його першої варіації, а саме:

$$\frac{\partial S_4}{\partial\alpha}\cdot\delta\alpha = 0\,, \tag{38}$$

звідки отримуємо таке рівняння:

$$2\omega^2 T\alpha - 2U\alpha + L = 0\,, \tag{39}$$

з якого знаходимо необхідне значення параметра α. Воно буде дорівнювати:

$$\alpha = \frac{L}{2\left(U - \omega^2 T\right)}\,. \tag{40}$$

Приймемо за базисну функцію $\psi(t)$ форму вимушених повздовжніх коливань стержня постійного поперечного перерізу з одним жорстко закріпленим кінцем, що виникають під дією поздовжньої гармонійної сили частоти ω, прикладеної в точці $x = x_1$.

Згідно з [2] форма вимушених коливань згаданого стержня має такий вигляд:

$$\psi(x) = D_1 \sin ax \qquad \text{при} \quad x \le x_1\,, \tag{41}$$

$$\psi(x) = D_2 \cos a\,(h - x) \qquad \text{при} \quad x > x_1\,, \tag{42}$$

де

$$D_1 = -\frac{1}{a\,EF}\cdot\frac{\cos a\,(h - x_1)}{\cos ah}\,, \tag{43}$$

$$D_2 = -\frac{1}{a\,EF}\cdot\frac{\sin ax_1}{\cos ah}\,, \tag{44}$$

$$a = \omega \sqrt{\frac{\mu}{EF}}\,, \tag{45}$$

де μ – погонна маса стержня; F – площа поперечного перерізу стержня; E – модуль Юнга для матеріалу стержня; h – довжина стержня; ω – частота вимушених коливань стержня.

Обчисливши параметри T, U і L згідно з виразами (34), (35) і (36), отримаємо необхідне значення параметра α відповідно до виразу (40), при якому функціонал (33) матиме стаціонарне значення.

Враховуючи (32), (41) і (42), отримаємо вирази для форми вимушених коливань коренеплоду, закріпленого в ґрунті. Вони мають такий вигляд:

$$\varphi(x) = \alpha \cdot D_1 \sin a\,x\,, \text{ при } x \le x_1\,,$$
$$\varphi(x) = \alpha \cdot D_2 \cos a\left(h - x\right), \text{ при } x > x_1\,. \tag{46}$$

Підставивши вирази (46) у (29), остаточно отримаємо закон вимушених коливань коренеплоду, закріпленого в ґрунті. Якщо враховувати дію збурювальної сили $H \sin \omega t$, то цей закон буде мати такий вигляд:

$$y(x,t) = D_1 \alpha \sin ax \cdot \sin \omega t\,, \text{ при } x \le x_1\,,$$
$$y\left(x,t\right) = D_2\ \alpha\ \cos a\left(h - x\right) \cdot \sin \omega t\,, \text{ при } x > x_1\,. \tag{47}$$

За результатами теоретичних досліджень вимушених коливань закріпленого в ґрунті коренеплоду проведено конкретний розрахунок амплітуди цих коливань.

Довжину коренеплоду h, кут його конусності γ, модуль Юнга E для тіла коренеплоду, густину ρ коренеплоду, коефіцієнт пружної деформації ґрунту c приймемо, згідно з [3], рівними: $h = 250 \cdot 10^{-3}$ $(\grave{\imath})$; $\gamma = 14^o$; $E = 18{,}4 \cdot 10^6$ $\left(\frac{H}{\grave{\imath}^{\ 2}}\right)$; $\rho = 1300$ $\left(\frac{\hat{e}\tilde{a}}{\grave{\imath}^{\ 3}}\right)$; $c = 1 \cdot 10^5 \left(\frac{H}{\grave{\imath}^{\ 2}}\right)$.

Амплітуду H збурювальної сили вибираємо в межах 100–600 (*Н*). Частоту ω збурювальної сили, згідно з [1], приймаємо рівною $\omega = 20{,}00$ $(\tilde{A}\ddot{o})$.

Розрахунок проведений за допомогою програми MathCAD з метою визначення залежності амплітуди вимушених поздовжніх коливань тіла коренеплоду від зміни збурювальної сили у діапазоні 100–600 (*Н*) для різних поперечних перерізів коренеплоду.

Результатом цього розрахунку є графік, наведений на рис. 2.

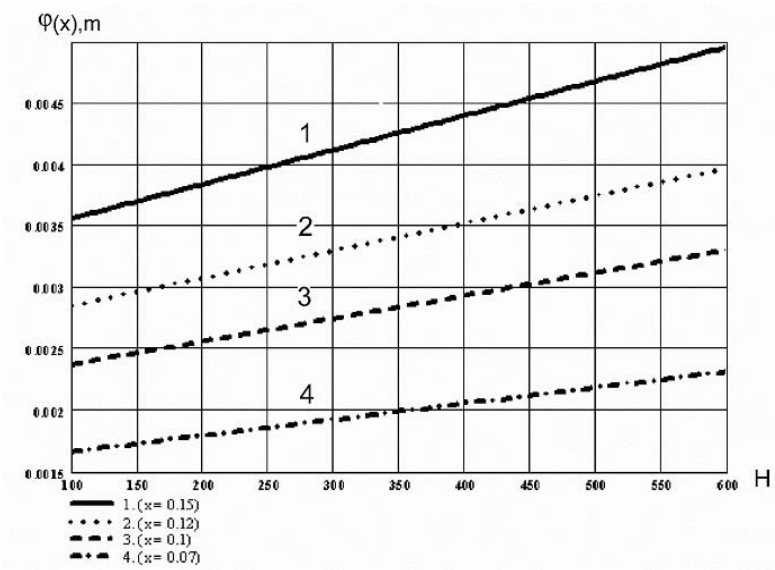

Рис. 2. Залежність амплітуди вимушених повздовжніх коливань тіла коренеплоду від величини збурювальної сили

Як видно з графіка, із збільшенням величини збурювальної сили амплітуда повздовжніх вимушених коливань тіла коренеплоду зростає за лінійним законом. При цьому з віддаленням площі поперечного перерізу коренеплоду від початку координат O амплітуда також зростає. Так, при $x = 0{,}07\,(\text{ì})$ амплітуда знаходиться в межах $1{,}7 - 2{,}3\,(\textit{мм})$, при $x = 0{,}1\,(\text{ì})$ – в межах $2{,}3 - 3{,}5\,(\textit{мм})$, при $x = 0{,}12\,(\text{ì})$ – в межах $2{,}8 - 3{,}9\,(\textit{мм})$, при $x = 0{,}15\,(\text{ì})$ (точка захвату) – в межах $3{,}2 - 4{,}8\,(\textit{мм})$.

Висновки. Побудована математична модель вібраційного викопування коренеплодів, яка описує повздовжні коливання його тіла під дією гармонійної збурювальної сили. Знайдена частота власних та амплітуда вимушених коливань тіла коренеплоду. Використання отриманих теоретичних залежностей дає змогу проектувати вібраційні викопуючі робочі органи з оптимальними параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Василенко П.М., Погорелый Л.В., Брей В.В.* Вибрационный способ уборки корнеплодов // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1970. – №2. – С. 9-13.
2. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
3. Свеклоуборочные машины (конструирование и расчет) / *Л.В. Погорелый, Н.В. Татьянко, В.В. Брей и др.; Под общ. ред. Л.В. Погорелого.* – К.: Техніка, 1983. – 168 с.

Mathematical simulation of the root crops vibrational digging up process

V. Bulgakov, I. Holovach, M. Berezovyy

The new theory of longitudinal oscillations of a root crop's body, fixed in soil has been developed on the base of variational principle of Ostrogradskii-Hamilton.

Fluctuations of Ostrogradskiy-Hamilton, longitudinal oscillations, equation of frequencies, form of oscillations, amplitude, frequency, root crop.

Математическое моделирование процесса вибрационного выкапывания корнеплодов

В.М. Булгаков, И.В. Головач, Н.Г. Березовый

На основании вариационного принципа Остроградского-Гамильтона разработана новая теория продольных колебаний тела корнеплода, закрепленного в почве.

Функционал Остроградского-Гамильтона, продольные колебания, уравнение частот, форма колебаний, амплитуда, частота, корнеплод.