УДК 514.18

ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ НА ПОВЕРХНІ ПСЕВДОСФЕРИ, ОПИСАНИХ ПАРАМЕТРИЧНИМИ РІВНЯННЯМИ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

С.Ф. ПИЛИПАКА, доктор технічних наук, професор

Т.М. ЗАХАРОВА, аспірант *

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Т.П. ФЕДОРИНА, кандидат педагогічних наук

Ніжинський агротехнічний інститут

Розглянуто шляхи пошуку просторових кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, на поверхні псевдосфери за допомогою першої квадратичної форми. Здійснено візуалізацію отриманих результатів та наведено рівняння знайдених кривих.

Ключові слова: *просторова крива, поверхня обертання, псевдосфера, натуральний параметр, перша квадратична форма*

Плоскі і просторові криві, описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра (довжини власної дуги), мають важливе значення для розв’язання багатьох задач, зокрема у диференціальній геометрії. Для кривих, заданих у такій формі, завжди можна знайти натуральне рівняння. Окрім того, таке задання дає можливість застосовувати формули Френе до оперування кривою, що дозволяє вирішувати ряд важливих задач, наприклад, у теорії згинання листового матеріалу (довжина ліній залишається сталою) або для визначення кінематичних характеристик руху матеріальної частинки за певною траєкторією [1]. Саме тому у наукових працях розробляються способи побудови плоских і просторових кривих за їх натуральним рівнянням [2, 3]. Особливий інтерес викликають такі криві, розташовані на певній поверхні обертання.

Мета досліджень – розробити підходи до знаходження просторових кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра та розташованих на заданій поверхні обертання.

Матеріали і методика досліджень. Як відомо, параметричні рівняння поверхні обертання мають такий вигляд [4]:

$$X=\varphi\cos v;\quad Y=\varphi\sin v;\quad Z=\psi, \tag{1}$$

де $\varphi=\varphi(t)$; $\psi=\psi(t)$ – параметричні рівняння плоскої кривої – меридіана поверхні обертання.

За допомогою першої квадратичної форми може бути знайдена довжина лінії на поверхні. Знайдемо першу квадратичну форму поверхні (1) у загальному вигляді, попередньо визначивши частинні похідні:

$$\begin{gathered}\frac{\partial X}{\partial t}=\varphi'_t\cos v;\qquad \frac{\partial Y}{\partial t}=\varphi'_t\sin v;\qquad \frac{\partial Z}{\partial t}=\psi'_t;\\ \frac{\partial X}{\partial v}=-\varphi\sin v;\qquad \frac{\partial Y}{\partial v}=\varphi\cos v;\qquad \frac{\partial Z}{\partial v}=0;\\ ds^2=(\varphi'^2_t+\psi'^2_t)dt^2+\varphi^2dv^2.\end{gathered} \tag{2}$$

Параметричні рівняння псевдосфери мають вигляд:

$$X=\sin u\cdot\cos v;\quad Y=\sin u\cdot\sin v;\quad Z=\ln\left(\mathrm{tg}\,{}^{u}\!/\!_{2}\right)+\cos u. \tag{3}$$

За формулами (2) знаходимо першу квадратичну форму поверхні:

$$ds^2=\mathrm{ctg}^2u\,du^2+\sin^2u\,dv^2. \tag{4}$$

Результати досліджень. Лінію на поверхні псевдосфери (4) можна задати, якщо зв'язати між собою дві незалежні змінні *u* і *v* поверхні певною функціональною залежністю. Вона може бути задана у вигляді *u=u(v)* або *v=v(u)*. Щоб розв'язати диференціальне рівняння (4), потрібно прирівняти праву частину до певної функції f^2.

Розглянемо приклади. Нехай незалежною змінною буде *u*, тобто функціональна залежність матиме вигляд *v=v(u)*. Розділимо ліву і праву частини рівняння (4) на dv^2:

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = ctg^2(u)\cdot\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \sin^2 u. \tag{5}$$

Нехай $f^2=b^2$, де b – *const*. Диференціальне рівняння (5) набуває вигляду:

$$ctg^2 u + \sin^2 u \cdot v'^2 = b^2. \tag{6}$$

Диференціальне рівняння (6) має розв'язок:

$$u = \frac{1}{2}\arccos\left(1 - 2b^2 + 2b^2 \cdot tg(bv)^2\right). \tag{7}$$

У рівнянні (4) праву частину ми прирівняли до b^2, тобто отримали $ds/dv = b$. Після інтегрування отримаємо вираз *s=bv*. Потім перейдемо до функціональної залежності між змінними *u* і *v* через третій параметр – довжину дуги *s* кривої на поверхні у вигляді *u=u(s)* або *v=v(s)*. З отриманого виразу *s=bv* знаходимо $v = s/b$. Щоб знайти вираз *u=u(s)*, підставимо в (7) замість змінної *v* її новий вираз $v = s/b$. Таким чином, заміна змінної *v* на вираз $v = s/b$ дає змогу отримати внутрішнє рівняння кривої на псевдосфері:

$$\begin{aligned} v &= s/b; \\ u &= \frac{1}{2}\arccos\left(1 - 2b^2 \cdot \mathrm{sech}^2 s\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Підстановка рівнянь (8) у рівняння псевдосфери (3) дає змогу знайти параметричні рівняння кривої на її поверхні у функції натурального параметра:

$$\begin{aligned} x &= b \cdot \cos(s/b) \cdot \mathrm{sech} s; \\ y &= b \cdot \sin(s/b) \cdot \mathrm{sech} s; \\ z &= \lg\left[\mathrm{tg}\left(\tfrac{1}{4} \cdot \arccos(1 - 2b^2 \cdot \mathrm{sech}^2 s)\right) + \sqrt{1 - b^2 \cdot \mathrm{sech}^2 s}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

Можна пересвідчитися, що для рівнянь (9) виконується рівність $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, яка вказує на правильність отриманих результатів. У таблиці крива 1 побудована у проекціях за рівняннями (9) для різних значень сталої *b*. У таблиці також наведено криву на поверхні псевдосфери із залежностями *u=u(s)* і *v=v(s)* під зображенням, які є рівняннями кривих у внутрішніх координатах поверхні.

Якщо прийняти *f=1/sin(u)*, можна отримати іншу криву. Тоді диференціальне рівняння (5) набуває вигляду:

$$\mathrm{ctg}^2 u + \sin^2 u \cdot v'^2 = 1/\sin^2 u. \tag{10}$$

Диференціальне рівняння (10) має розв'язок: $v = \lg\left(\mathrm{tg}\, u/2\right)$.

Оскільки *f=1/sin(u)*, а змінною у цьому випадку прийнято *u*, то *ds/du=1/sin(u)*. Інтегруючи цю залежність, одержимо:

$$s = \ln\left|\mathrm{tg}\, u/2\right| \qquad \text{звідки} \qquad u = 2arcctg\left(e^{-s}\right). \tag{11}$$

Параметричні рівняння отриманої кривої на поверхні псевдосфери у функції натурального параметра *s* мають такий вигляд:

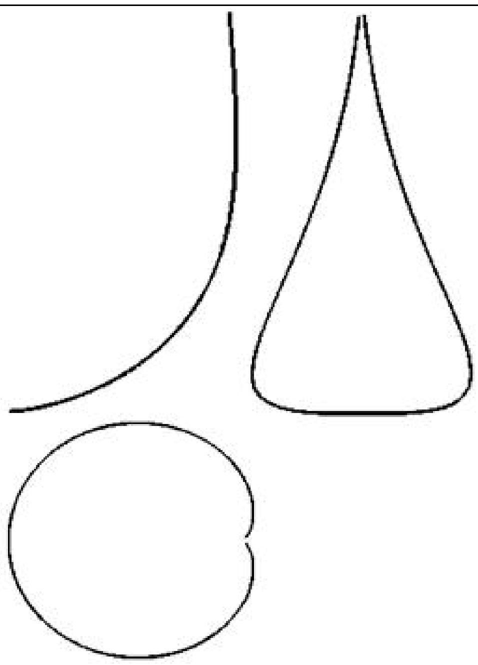
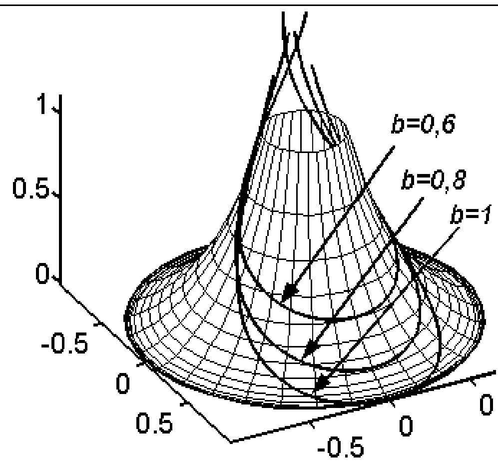
$$\begin{aligned} x &= \cos\left(\lg e^s\right) \cdot \mathrm{sech}\, s; \\ y &= \sin\left(\lg e^s\right) \cdot \mathrm{sech}\, s; \\ z &= \lg\left(e^s\right) - \mathrm{tgh}\, s. \end{aligned} \tag{12}$$

Отримана крива 2 у таблиці є асимптотичною лінією.

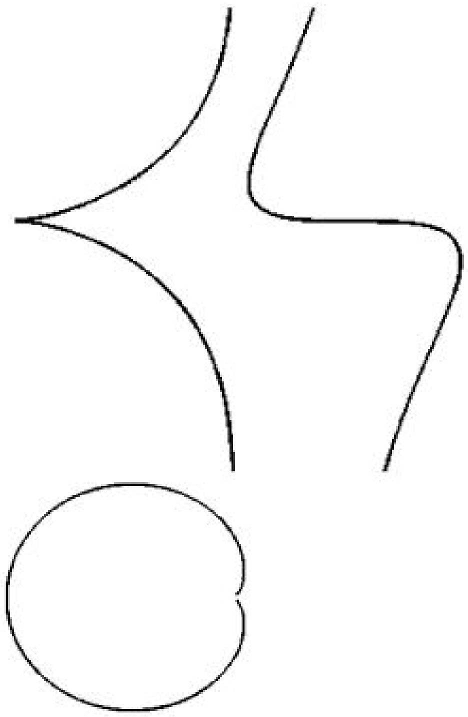
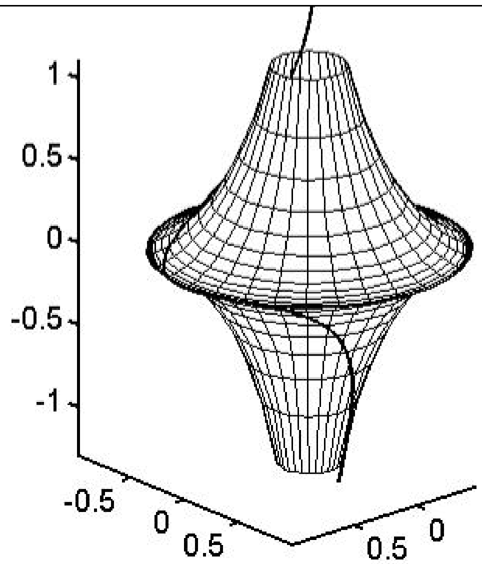
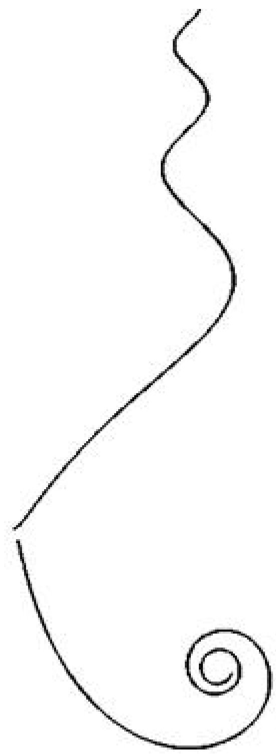
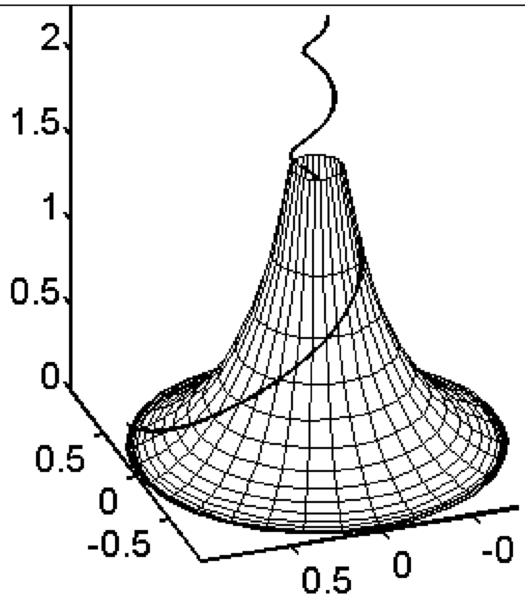
Залежність між змінними *u* і *v* можна задавати у вигляді: $u=u(t)$, $v=v(t)$, де t – нова змінна. Щоб розв’язати диференціальне рівняння (4), задаємо функцію $f=f(t)$ і одну із залежностей: $u=u(t)$ або $v=v(t)$. Якщо після подальшого інтегрування вдається знайти залежність $t=t(s)$, то далі діємо за раніше розглянутим алгоритмом.

Можливий також варіант, коли задаємо дві функції $u=u(t)$ і $v=v(t)$ і знаходимо залежність $f=f(t)$.

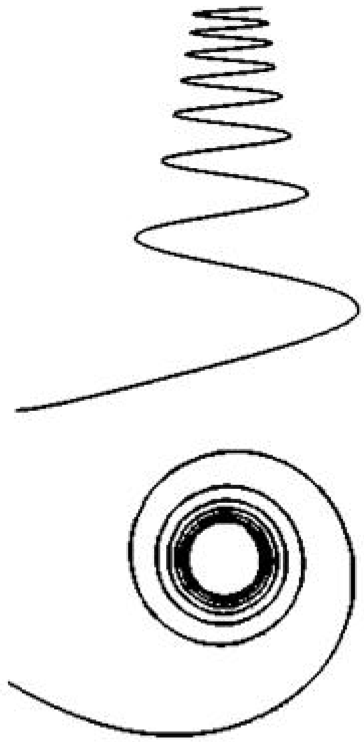
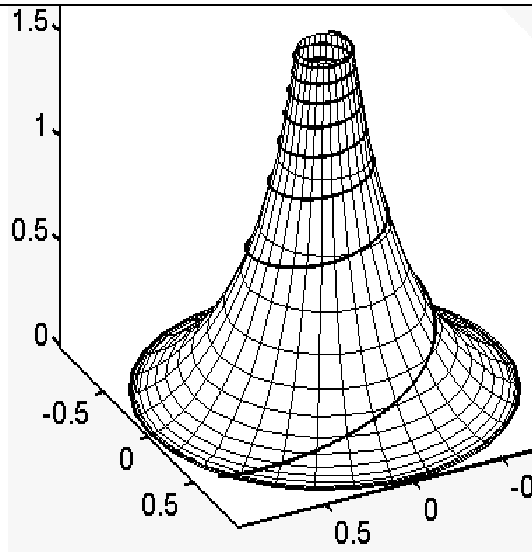
Криві на поверхні псевдосфери, описані у функції натурального параметра

<table>
<tr><td>№
п/п</td><td>Ортогональні проекції кривої</td><td>Крива на поверхні в аксонометрії та її внутрішнє рівняння в криволінійних координатах</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.</td><td rowspan="2"></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$v = s/b;$$
$$u = \frac{1}{2}\arccos\left(1 - 2b^2\operatorname{sech}^2 s\right)$$</td></tr>
</table>

Продовження таблиці

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="2"></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$v = \ln(e^{s});$
$u = 2 \cdot \mathrm{arcctg}(e^{-s/b})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2"></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$b = 2;$
$v = \sqrt{b^{2} - 1} \cdot e^{-s/b};$
$u = \arcsin(e^{s/b})$</td></tr>
</table>

Продовження таблиці

1	2	3
4.		
		$b = 2;$ $v = \frac{s}{2b}\sqrt{s^2 - 1} - \frac{1}{4b}\ln\left[2s \cdot \cdot\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right) - 1\right];$ $u = -\arcsin\left(b/s\right)$

За допомогою розробленого підходу нам вдалося знайти ще ряд кривих, наведених у таблиці.

Висновки

1. Запропоновані у статті підходи зводяться до того, щоб квадратичну форму поверхні обертання можна було проінтегрувати. Для цього спеціальним чином підбирається одна із функцій, що до неї входять.

2. У статті здійснено візуалізацію отриманих результатів та наведено рівняння знайдених кривих.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Войтюк Д.Г. Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Збірник наукових праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва». – К.: НАУ, 2001. – Т. 10. – С. 74–78.

2. Пилипака С.Ф. Конструювання просторових кривих, заданих натуральними рівняннями, за допомогою чисельних методів / С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Збірник наукових праць, присвячений 75-річчю від дня народження проф. Михайленка В.Є. – Харків: ХДАТОХ, 2002. – Вип. 1. – С. 24–26.

3. Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М. Побудова просторової кривої лінії за заданими натуральними рівняннями / С.Ф. Пилипака, В.М. Несвідомін // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: КГТУСА, 1996. – Вып. 59. – С. 106–107.

4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1969. – 176 с.

ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ ПСЕВДОСФЕРЫ, ОПИСАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ В ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

С.Ф. ПИЛИПАКА, Т.Н. ЗАХАРОВА, Т.П. ФЕДОРИНА

Рассмотрены пути поиска пространственных кривых, описанных параметрическими уравнениями в функции натурального параметра, на поверхности псевдосферы с помощью первой квадратичной формы. Осуществлена визуализация полученных результатов и приведены уравнения найденных кривых.

Ключевые слова: *пространственная кривая, поверхность вращения, псевдосфера, натуральный параметр, первая квадратичная форма*

GEOMETRY OF THE CURVES ON THE SPOT OF THE PSEUDOSPHERE, DESCRIBED BY THE SELF-REACTANCE EQUATIONS IN THE FUNCTION OF NATURAL PARAMETER

S. PYLYPAKA, T. ZAKHAROVA, T. FEDORINA

The methods of searching of the spatial curves on the spot of the pseudosphere by the first quadratic form are considered in the article Curves are described by the self-reactance equations in the function of natural parameter. Visualization of the got results is carried out and equation of the found curves is resulted.

Keywords: *spatial curve, surface of rotation, pseudosphere, natural parameter, first quadratic form*