УДК 514.752

# КОНСТРУЮВАННЯ КАНАЛОВОЇ ПОВЕРХНІ, ВІДНЕСЕНОЇ ДО ЛІНІЙ КРИВИНИ, ЯК МНОЖИНИ КІЛ КРИВИНИ КОНІЧНОЇ ГВИНТОВОЇ ЛІНІЇ

**М.М. МУКВИЧ,** кандидат технічних наук

*Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України "Ніжинський агротехнічний інститут"*

*Розглянуто конструювання каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини у системі супровідного тригранника конічної гвинтової лінії. Циклічний каркас ліній кривини каналової поверхні утворено за допомогою кіл кривини конічної гвинтової лінії. Отримано параметричні рівняння каналової поверхні, здійснено її візуалізацію.*

***Ключові слова:*** *каналова поверхня, супровідний тригранник Френе, лінія центрів, перша квадратична форма поверхні*

Задача віднесення поверхонь до ліній кривини є важливою геометричною задачею, зумовленою зручністю використання цієї параметризації при дослідженні взаємодії середовища із поверхнями. Перевагою вказаного аналітичного задання поверхні є особливо простий вигляд першої та другої квадратичних форм у будь-якій точці поверхні. Клас поверхонь, які можна віднести до ліній кривини, досить обмежений і включає різьблені поверхні Монжа, цикліди Дюпена, поверхні Іоахімсталя.

Серед конструктивних способів віднесення каналових поверхонь до ліній кривини використовують спосіб, при якому циклічний каркас каналової поверхні утворюється за допомогою руху твірного кола у системі супровідного тригранника Френе просторової напрямної кривої [2, 6]. Тоді задача віднесення до ліній кривини каналової поверхні приводить до диференціального рівняння Ріккаті, яке у загальному випадку не інтегрується у квадратурах [4].

**Мета досліджень –** визначити умови віднесення каналової поверхні до ліній кривини, знайти параметричні рівняння вказаної поверхні та здійснити її візуалізацію.

**Матеріали і методика досліджень.** Задамо просторову лінію $f$ векторним рівняннями у вигляді функції довжини її дуги $s$:

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = x(s) \cdot \bar{i} + y(s) \cdot \bar{j} + z(s) \cdot \bar{k}, \tag{1}$$

де $\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$ – орти нерухомої системи координат $Oxyz$. Кожній точці просторової кривої (1) поставимо у відповідність її коло кривини, яке буде знаходитись у стичній площині тригранника Френе. Радіус кола кривини дорівнює: $R = R(s) = \dfrac{1}{k(s)}$, де $k = k(s)$ – кривина просторової кривої $f$. Тоді, при русі тригранника Френе по просторовій напрямній кривій $f$, циклічний каркас кіл кривини кривої $f$ утворить сім'ю із ліній кривини каналової поверхні [4]. Векторне рівняння каналової поверхні, утвореної множиною кіл кривини просторової кривої $f$, заданої рівняннями (1), має вигляд [4]:

$$\bar{R}(v,s) = \bar{r}(s) + \bar{\tau} \cdot \frac{1}{k(s)} \cdot \cos v + \bar{n} \cdot \frac{1}{k(s)} \cdot (1 + \sin v), \tag{2}$$

де $v$ – незалежна змінна, $k = k(s)$ – кривина просторової кривої $f$.

Для знаходження сім'ї ліній, ортогональної до множини кіл циклічного каркасу, необхідно розв'язати диференціальне рівняння ортогональних траекторій, яке для каналової поверхні, заданої векторним рівнянням (2), має вигляд [4]:

$$\frac{dv}{ds} = -\left(\left(\frac{1}{k(s)}\right)_s' \cdot \cos v + 1\right) \cdot k(s). \tag{3}$$

Розв'язок диференціального рівняння (3) є аналітичною умовою віднесення каналової поверхні, циклічний каркас якої утворено множиною кіл кривини просторової кривої $f$, до ліній кривини.

**Результати досліджень.** Диференціальне рівняння (3) відноситься до диференціальних рівнянь, *не розв'язуваних відносно похідної* [5] щодо невідомої функції $v = v(s)$. Здійснимо заміну:

$$t(v) = tg\frac{v}{2}. \tag{4}$$

Звідки: $v = 2 \cdot arctg(t);\ \ dv = \dfrac{2}{1+t^2} \cdot dt.$

Підстановка останніх рівностей у диференціальне рівняння (3) після спрощень перетворить його у неповне диференціальне рівняння Ріккаті [5]:

$$\frac{dt}{ds} = -\left(t^2(s) \cdot \frac{k^2(s) + k_s'}{2 \cdot k(s)} + \frac{k^2(s) - k_s'}{2 \cdot k(s)}\right), \tag{5}$$

де $t = t(s)$ – невідома функція, $k(s)$ – задана кривина просторової напрямної кривої (1).

Диференціальне рівняння (5) у загальному випадку не інтегрується в квадратурах, але може бути зведене до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними для окремих функцій $k(s)$.

Якщо $k = const$, то отримаємо умову віднесення трубчастої поверхні (циклічний каркас кіл сталого радіуса $R = \dfrac{1}{k}$ ) до ліній кривини. Аналітичний опис вказаної поверхні детально здійснено в роботі [1].

Якщо $\dfrac{k^2(s) + k_s'}{2 \cdot k(s)} = 0$, тоді диференціальне рівняння $k^2(s) + k_s' = 0$ має деякий частинний розв'язок:

$$k(s) = \frac{1}{s}. \tag{6}$$

Підстановка виразу кривини (6) у диференціальне рівняння Ріккаті (5) зводить його до рівняння: $\dfrac{dt}{ds} = -\dfrac{1}{s}$, загальним розв'язком якого є функція:

$$t(s) = u - \ln s. \tag{7}$$

У виразі (7) змінна $u$ – довільна стала інтегрування, яка буде новою змінною у параметричних рівняннях поверхні замість змінної $v$. Врахувавши заміну (4) для рівності (7), отримаємо *аналітичну умову віднесення каналової поверхні до ліній кривини*, як множини кіл кривини просторової кривої (одне із натуральних рівнянь просторової кривої має вигляд $k(s)=\frac{1}{s}$):

$$v(s)=2\cdot arctg(u-\ln s). \tag{8}$$

Якщо у диференціальному рівнянні (5): $a\cdot\frac{k^2(s)+k'_s}{2\cdot k(s)}=\frac{k^2(s)-k'_s}{2\cdot k(s)}$, де $a$ – деяке стале число, то кривина напрямної кривої дорівнює $k(s)=\frac{a+1}{(a-1)\cdot s}$. Отримали обернену пропорційність, аналогічну до функції (6), тому аналітичну умову віднесення поверхні до ліній кривини знаходити не будемо.

У ролі просторової напрямної кривої (1) розглянемо *конічну гвинтову лінію* укосу, задану залежністю (6) кривини від довжини дуги і кутом $\beta=const$, який утворює дотична до напрямної кривої із горизонтальною площиною. Тоді параметричні рівняння вказаної кривої знайдемо за формулами [3]:

$$\begin{aligned} x&=\cos\beta\cdot\int\cos\left(\frac{1}{\cos\beta}\int kds\right)ds;\\ y&=\cos\beta\cdot\int\sin\left(\frac{1}{\cos\beta}\int kds\right)ds;\\ z&=s\cdot\sin\beta. \end{aligned} \tag{9}$$

Підставивши (6) у (9), отримаємо параметричні рівняння конічної гвинтової лінії:

$$\begin{aligned} x(s)&=\frac{s\cdot\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta}\cdot(\cos\beta\cdot\cos(\gamma(s))+\sin(\gamma(s)));\\ y(s)&=\frac{s\cdot\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta}\cdot(\cos\beta\cdot\sin(\gamma(s))-\cos(\gamma(s)));\\ z(s)&=s\sin\beta, \end{aligned} \tag{10}$$

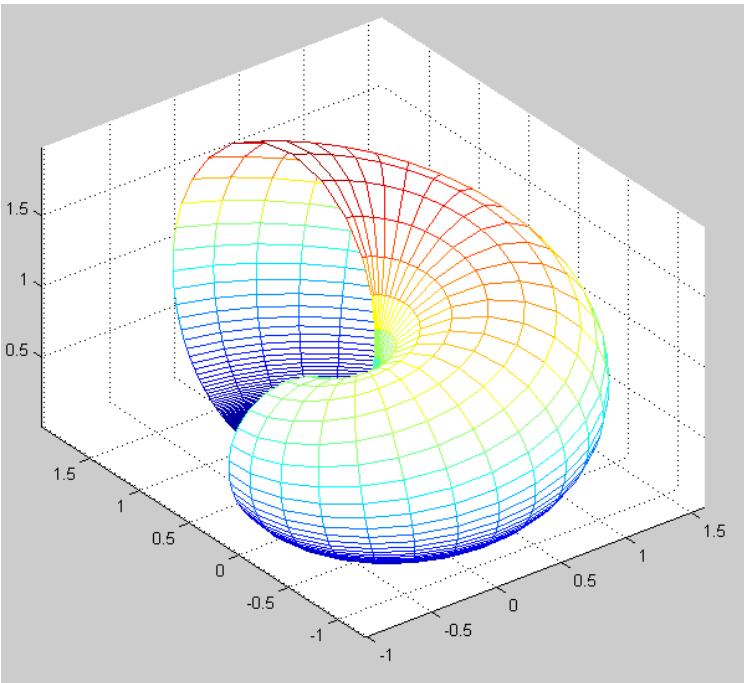
де $\gamma(s)=\frac{\ln(s)}{\cos\beta}$.

За методикою, детально описаною у роботі [3], знайдемо параметричні рівняння, які відповідають векторному рівнянню (2) каналової поверхні, утвореної множиною кіл кривини конічної гвинтової лінії:

$$
\begin{aligned}
X(v,s) &= \frac{s\cdot\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta}\cdot(\cos\beta\cos\gamma+\sin\gamma)+\\
&\qquad + s\cdot(\cos\beta\cos v\cos\gamma-(1+\sin v)\sin\gamma);\\
Y(v,s) &= \frac{s\cdot\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta}\cdot(\cos\beta\sin\gamma-\cos\gamma)+\\
&\qquad + s\cdot(\cos\beta\cos v\sin\gamma-(1+\sin v)\cos\gamma);\\
Z(v,s) &= s\sin\beta\cdot(1+\cos v);
\end{aligned}
\tag{11}
$$

де $\gamma(s)=\dfrac{\ln(s)}{\cos\beta}$.

Каналова поверхня, задана рівняннями (11), має тільки одну сім'ю ліній кривини – циклічний каркас. Якщо у рівняння (11) підставити умову (8), тобто $v=2\cdot arctg(u-\ln s)$, то отримаємо параметричні рівняння $X(u,s), Y(u,s), Z(u,s)$ каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини, як множини кіл кривини конічної гвинтової лінії (рис.1).



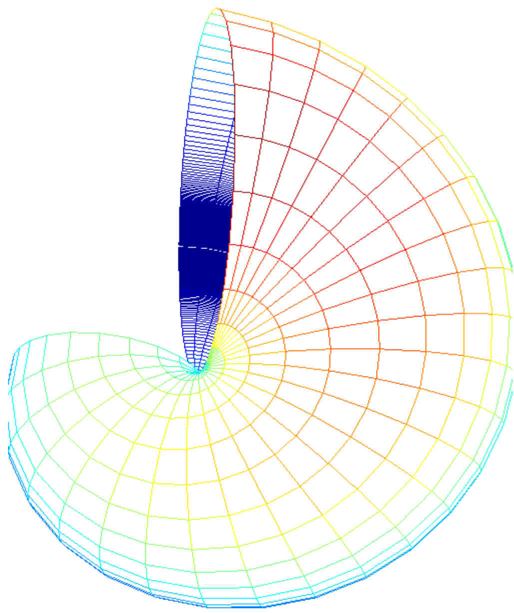



Рис.1. Каналова поверхня, віднесена до лінй кривини та її горизонтальна проекція.

## Висновки

1. Використання просторової напрямної кривої (конічної гвинтової лінії), кривина якої дорівнює $k(s)=\frac{1}{s}$ (де $s$ – довжина дуги кривої), дозволяє знайти аналітичну умову (8) віднесення каналової поверхні до ліній кривини.

2. У статті знайдено параметричні рівняння каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини, та здійснено її візуалізацію.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Несвідомін В.М. Конструювання трубчастої поверхні, віднесеної до ліній кривини, як множини кіл кривини гвинтової лінії / В.М. Несвідомін, В.М. Бабка, М.М. Муквич // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2011. – № 28. – С.45–50.

2. Пилипака С.Ф. Конструювання каналових поверхонь Іоахімсталя сім'ями ліній кривини / С.Ф. Пилипака // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1998.– № 64. – С. 171–173.

3. Пилипака С.Ф. Конструювання лінійчатих поверхонь загального виду в системі супровідного тригранника напрямної просторової кривої / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2007. – № 4. – Прикл. геометрія та інж. граф.– Том 35. – С. 10–18.

4. Пилипака С.Ф. Аналітична умова віднесення поверхні до ліній кривини як множини кіл кривини просторової кривої / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Міжвузівський збірник «Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». – Луцьк, видавництво ЛНТУ, 2011. – №6. – С. 178–181.

5. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения /А.М.Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – К.: Вища школа, 1989. – 384 с.

6. Фролов О. В. Каналові поверхні та їх віднесення до ліній кривини /О.В. Фролов // Праці ТДАТА. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – № 4.– Прикл. геометрія та інженерна графіка. – Т. 22. – С. 112–120.

**КОНСТРУИРОВАНИЕ КАНАЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОТНЕСЕННОЙ К ЛИНИЯМ КРИВИЗНЫ, КАК МНОЖЕСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ КРИВИЗНЫ КОНИЧЕСКОЙ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ**

Н.Н. МУКВИЧ

*Рассмотрено конструирование каналовой поверхности, отнесенной к линиям кривизны в системе сопровождающего трёхгранника конической винтовой линии. Циклический каркас линий кривизны каналовой поверхности образован с помощью окружностей кривизны конической винтовой линии. Получены параметрические уравнения каналовой поверхности, осуществлена её визуализация.*

***Ключевые слова:*** *каналовая поверхность, сопровождающий трёхгранник Френе, линия центров, первая квадратичная форма поверхности*

**THE CONSTRUCTING OF A CANAL SURFACE, REFERRED TO THE LINES OF CURVATURE, AS A SET OF CIRCLES OF CURVATURE OF A CONICAL HELIX**

M. MUKVICH

*We consider the constructing of canal surface, referred to the lines of curvature of the system of accompanying three-edge of a conical helix. Cyclic framework of lines of curvature of the canal surface formed by the circles of curvature of a conical helix. Obtained by the parametric equations of canal surface, carried its visualization.*

***Keywords:*** *canal surface, accompanying three-edge of Frenet, line of centers, first quadratic form of surface.*